基于 DWT 的多尺度分块变采样率压缩感知图像重构算法*

蒋业文，于昕梅
（佛山科学技术学院电子与信息工程学院，广东 佛山 528000）

摘　要： 利用压缩感知理论改善图像重构的质量是目前图像处理技术研究的焦点。通过 DWT 域对图像每级分解时的每个子带中应用分块采样并结合平滑投影 Landweber 重构算法，提出一种多尺度分块变采样率压缩感知图像重构算法。比较 BCS-SPL 和 TV 以及多尺度 GPSR 图像处理算法，文中提出的算法使重构的图像质量提高了 1 ~3 dB。

关键词： 多尺度；DWT；压缩感知（CS）；变采样率；重构

中图分类号： TP391　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 0529 - 6579（2013）03 - 0030 - 04

An Image Variable Sampling and Reconstruction Algorithm Based DWT Multiscale Block Compressed Sensing

JIANG Yewen, *YU Xinmei*
（College of Electronic and Information Engineering, Foshan University, Foshan 528000, China）

Abstract: At present, utilizing Compressed Sensing（CS）theory to improve image quality of reconstructions is a research focus of image process technology. By deploying block-based CS variable sampling within the domain of a wavelet transform, a multiscale block-CS algorithm with smoothed projected Landweber reconstruction algorithm is provided. Block-based CS sampling is applied independently within each subband of each decomposition level of a wavelet transform of a image. Experimental results reveal that the algorithm achieves a 1 ~ 3 dB gain in reconstruction PSNR over the BCS-SPL and TV as well as multiscale GPSR algorithm.

Key words: multiscale; DWT; compressed sensing; variable sampling rate; reconstruction

由于具有数据的稀疏性表示和高质量信号的恢复性能，压缩感知（CS）理论目前成为图像采样和图像重构实现的研究热点[1-5]。现实自然图像在某些变换域下几乎总是可压缩的，因此，结合图像统计或结构的先验知识，CS 算法如其他信号处理一样能够直接应用于图像数据处理，如图像的采样和重构都可在离散 DWT 域通过利用小波系数的统计模型来实现[6-7]。

对于图像数据的多维信号处理，CS 技术应用的最大挑战是计算的复杂性问题。目前，解决此问题的主要方法是分块 CS 采样技术，而在重构实现时利用了分块 CS 的先验知识和平滑投影重构（BCS-SPL）技术[8-9]。相对于图像特征的 CS 全采样技术，这种方法确实提高了计算开销，解决了计算实时性问题。但是，一定程度上，BCS-SPL 技术降低了重构的图像质量。

为了兼顾图像的重构质量和 CS 的计算开销，借鉴 DWT 域的 BCS-SPL 实现技术，本文提出一种新的多尺度分块 CS 实现技术。与文献［8］多尺度技术以及文献［10］通用的全变量 TV-CS 技术比较，本文的实现方法不但明显地提高了重构的图像质量，而且极大地节约了运行时间。

* **收稿日期：** 2012 - 12 - 30
基金项目： 广东省科技计划资助项目（2009B050800004）
作者简介： 蒋业文（1964 年生），男，副教授；E-mail：j. yewen@163. com

1　分块 CS 采样与 BCS-SPL 技术

CS 理论说明，假设信号 $x \in \mathbf{R}^N$ 为从 M 个采样信号中获得的长度为 N 的信号，且 $M << N$。那么，我们可以从（1）式中恢复信号 x：

$$y = \boldsymbol{A}x \tag{1}$$

其中，y 的长度为 M，而 $\boldsymbol{A}$ 为 $M \times N$ 测量矩阵（也称为观测矩阵），且具有子采样率 $S = M/N$。如果 x 在某个变换矩阵 $\boldsymbol{\Psi}$（如 DCT，DWT 等）下是稀疏的，即有

$$x = \boldsymbol{\Psi}\alpha, \quad \| \alpha \|_0 \quad < K \tag{2}$$

这里，α 为稀疏系数，$\| \alpha \|_0$ 表示 0 – 范数，即稀疏系数非 0 的个数。这时，（1）式变为

$$y = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Psi}\alpha \tag{3}$$

可以证明[11-12]，当测量维数满足 $K < M < N$ 时，信号 x 可以通过解决 0 – 范数或 1 – 范数下的优化问题从 $M = O(K\log N)$ 个测量数据中高概率重构 x。

对于一维信号测量矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可采用高斯随机矩阵或伯努利二值随机矩阵等生成。但是，对于二维图像信号，N 的长度非常大，如 128×128 的图像 N 的长度为 10^4 等级。因此，$\boldsymbol{A}$ 的计算量很大且难以存储。这样，CS 在 2D 图像中应用受到较大限制。为此，文献［13］提出一个分块 CS 技术（Block-based CS，BCS）。在 BCS 中，一个图像被分成 $B \times B$ 块，并使用一个近似大小的测量矩阵进行采样。假设 x_i 表示通过 Z 行扫描输入的第 i 个图像块的向量表示，那么有

$$y_i = \boldsymbol{\Phi} \cdot x_i \tag{4}$$

其中，$\boldsymbol{\Phi}$ 为 $M_B \times B^2$ 大小的测量矩阵。因此，整个图像的采样子率为 $S = M_B/B^2$。这时，（1）式中整个图像的测量矩阵 $\boldsymbol{A}$ 具有对角型结构性矩阵 $\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{\Phi})$，其形式为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Phi} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{\Phi} \end{bmatrix} \tag{5}$$

这里分块的大小 B 根据图像重构的速率和重构的质量要求综合决定，按照经验，一般地取 $B = 16$，32，64。同时，由于分块之后测量矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 的维数相对降低，因此，各个块的初始值 x_{i0} 通过下式可以得到

$$x_{i0} = \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}})^{-1}y_i \tag{6}$$

在［5］中，提出的 BCS 算法中，图像的采样通过分块基的随机矩阵实现，而图像的重构结合平滑滤波器由投影 Landweber（PL）算法实现。因此，它的整个实现技术称为 BCS-SPL。

BCS-SPL 能够实现图像的快速重构，但重构的图像质量取决于分块测量矩阵 Φ 的具体实现形式。为此，本文基于 BCS 特性提出一种新的 BCS-SPL 技术，用以改进图像的重构质量，同时保持图像重构操作的实时性。

2　基于 DWT 的多尺度 BCS-SPL 实现技术

2.1　DWT 多尺度 BCS 采样技术

在 DWT 多尺度 BCS-SPL 算法研究中，我们把测量矩阵 $\boldsymbol{A}$ 被分成两个部分：一个是 DWT 多尺度变换矩阵 $\boldsymbol{\Omega}$，另一个是多尺度分块测量矩阵 $\boldsymbol{\Phi}'$，即 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{\Omega}$。因此，有

$$y = \boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{\Omega} \cdot x \tag{7}$$

假设 $\boldsymbol{\Omega}$ 为 L 级 DWT 分解。那么，在每一级，$\boldsymbol{\Phi}'$ 组成 L 个不同的分块采样实现矩阵。这时，图像 x 的 DWT 变换形式为 $\bar{x} = \boldsymbol{\Omega}x$。则，$\bar{x}$ 在 l 级的子带被分成 $B_l \times B_l$ 块，并通过适当大小的矩阵 $\boldsymbol{\Phi}_l$ 进行采样（其中 $l = L$ 为最高级分辨率）。

假设 $\bar{x}_{l,s,j}$ 是第 l 级子带 s 上的第 j 块图像的向量表示，且满足 $s \in \{H,V,D\}$，$1 \leqslant l \leqslant L$（$H$ 表示水平方向子带，V 为垂直方向子带，D 为对角方向子带）。那么，CS 的观测值为

$$y_{l,s,j} = \boldsymbol{\Phi}_l \cdot \bar{x}_{l,s,j} \tag{8}$$

由于不同级的小波分解对图像重构有不同的重要性，因此，本文在每一个 l 级都会调整采样过程以产生不同的采样子率 S_l。其中，设置 DWT 基带子率为全采样子率，$S_0 = 1$。

设 l 级的子率 S_l 为

$$S_l = W_l \cdot S' \tag{9}$$

这里，W_l 为 l 级的子率加权系数。则，整个图像的采样子率为

$$S = \frac{1}{4^L}S_0 + \sum_{l=1}^{L} \frac{3}{4^{L-l+1}}W_l S' \tag{10}$$

可见，当已知图像的目标采样率 S 和加权系数 W_l 后，由（10）式很容易求出 S'，由此再通过（9）式得到 l 级的子率 S_l。但是，这种处理会产生一个或多个 $S_l > 1$ 的情况。所以，我们必须要对此进行改进并迫使所有 l 级情况下 $S_l \leqslant 1$。由（9）和（10）式求得 S' 和 S_1 后，我们检查是否 $S_1 > 1$。如果 $S_1 > 1$ 成立，设置 $S_1 = 1$，代入（10）式，可以得到

$$S = \frac{1}{4^L}S_0 + \frac{3}{4^L}S_1 + \sum_{l=2}^{L} \frac{3}{4^{L-l+1}}W_l S' \tag{11}$$

求出 S'，再次通过（9）式重新确定 $l=2, \cdots, L$ 情况下的子率 S_l。重复此过程，直到所有 l 级情况下 $S_l \leqslant 1$。

特别地，经过多次实验，子率加权系数 W_l 通过下式确定：

$$W_l = 16^{L-l+1} \tag{12}$$

表 1 说明了在各种不同的目标子率下，$L=3$ 级 DWT 变换实现的各级子率统计。

表 1 $L=3$ 级 DWT 变换实现的子率统计

Table 1 The subrate statistics of three level DWT

S	S_1	S_2	S_3
0.1	1.000 0	0.160 0	0.010 0
0.2	1.000 0	0.586 7	0.036 7
0.3	1.000 0	1.000 0	0.066 7
0.4	1.000 0	1.000 0	0.200 0
0.5	1.000 0	1.000 0	0.333 3

2.2 多尺度 BCS 图像重构算法

在图像 DWT 稀疏变换域内，结合图像边缘的 3×3 维纳滤波和稀疏提升阈值处理，表 2 说明了本文多尺度 BCS 图像重构实现算法的流程。其中，维纳滤波在空间域实现，而平滑和阈值操作在变换域进行，Landweber 实现步骤形式为 $x \leftarrow x + \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(y - \boldsymbol{\Phi}x)$。实现时，在 DWT 分解的每一级中的每个块都使用了适当大小的 $\boldsymbol{\Phi}_l$ 采样矩阵和 Landweber 迭代步骤。

表 2 多尺度 BCS 2D 图像重构算法

Table 2 The 2D image reconstruction algorithm based multiscale BCS

函数 $\bar{x}$ 多尺度 BCS(参数 $y, \{\boldsymbol{\Phi}_{l,1\leqslant l\leqslant L}\}, \boldsymbol{\Psi\Omega}$) 求解
对于 l 级和子带 $s \in \{H,V,D\}, 1 \leqslant l \leqslant L$
设置第 j 块初始值：$\bar{x}_{l,sj}^{(0)} = \boldsymbol{\Phi}_l^{\mathrm{T}} \cdot y_{l,sj}$
当 $i=0$，执行；$x^{(i)} = \boldsymbol{\Omega}^{-1}\bar{x}^{(i)}$
$\hat{x}^{(i)} = \mathrm{Wiener}(x(i))$, $\hat{\bar{x}}^{(i)} = \boldsymbol{\Omega}\hat{x}^{(i)}$
对行 j 块迭代：$x_{l,sj}^{\prime(i)} = \hat{\bar{x}}_{l,s,j}^{(i)} + \boldsymbol{\Phi}_l^{\mathrm{T}}(y_{l,s,j} - \boldsymbol{\Phi}_l\hat{\bar{x}}_{l,s,j}^{(i)})$
$x^{\prime\prime(i)} = \boldsymbol{\Psi\Omega}^{-1}x^{\prime(i)}$
$\bar{x}^{\prime(i)} = \mathrm{threshold}(x^{\prime\prime(i)})$
$\bar{x}^{(i)} = \boldsymbol{\Omega\Psi}^{-1}\bar{x}^{\prime(i)}$
对于 l 级和子带 $s \in \{H,V,D\}, 1 \leqslant l \leqslant L$
$\bar{x}_{l,s,j}^{(i+1)} = x_{l,s,j}^{(i+1)} + \boldsymbol{\Phi}_i^{\mathrm{T}}(y_{l,s,j} - \boldsymbol{\Phi}_l x_{l,s,j}^{(i)})$
计算残差：$D^{i+1} = \lVert \bar{x}^{(i+1)} - x^{\prime(i)} \rVert_2$
$i = i+1$
直到 $\lvert D^{(i)} - D^{(i-1)} \rvert < 10^{-2}$
$\bar{x} = \bar{x}^{(i)}$ // $\bar{x}$ 为原图像数据 x 的估计值

3 实验结果

对 512×512 的几幅灰度图像进行基于 DWT 的多尺度 BCS 采样并且重构，同时与文献［8］提出的 BCS-SPL 算法、文献［10］提出的 TV 算法以及文献［9］描述的多尺度 GPSR 算法进行比较。其中，本文算法和 BCS-SPL 算法均使用双树 DWT（DDWT）作为稀疏基 $\boldsymbol{\Psi}$，采样时使用 9/7 双正交 3 级 DWT 作为多尺度变换矩阵 $\boldsymbol{\Omega}$。$\boldsymbol{\Omega}$ 进行 l 级分解时，大小为 $B_l \times B_l$ 图像块采样使用文献［11］提出的随机 DCT SRM 观测矩阵进行实现。而 TV 算法使用文献［10］的扰乱块 Hadamard SRM 作为观测矩阵，多尺度 GPSR 算法使用 Gaussian 尺度混合模型进行采样。其他实验条件相同。当 $l=1, 2, 3$ 时，块的大小分别为 $B_l=16, 32, 64$，每一级的采样子率都使用表 1 的计算结果。图 1 说明了几种算法重构 Lena 图像的部分实验结果。由图可见，当采样子率 $S=0.1$ 时，本算法提出的小波域分块采样和多尺度重构的图像质量优于 BCS-SPL 算法约 3 dB。同时，本算法也优于 TV 算法和多尺度 GPSR 算法约 1－2 dB。表 3 说明了几种算法对 Lena 图像、Barbara 图像以及 Pepper 图像重构质量（以 PSNR 为衡量标准）的对比结果。某些情况下，当采样子率较高时，对于重构的 Barbara 图像，TV 算法性能优于其它算法。但是，TV 算法的实时性能最差。

4 结 论

在 DWT 域内，利用分块 CS 采样技术，本文提出了一种图像多尺度分块压缩感知采样与重构图像算法。相比 BCS-SPL 算法，由于本文的算法在 DWT 每级分解的每个子带上都使用多尺度重构 Landweber 技术并结合了维纳滤波技术，使重构的图像质量大约提高了 1～3 dB。同时，本文的算法降低了实现的复杂性，并具有较高的实时性能。相对于常用的 DWT 图像处理算法，由于分块 CS 图像处理算法在每个子带上利用了 DWT 的多分辨率和多尺度特性，所以，其观测结果能充分表示图像的内部结构。因此，本文提出的算法重构的图像质量也更好，且需要的数据量更少。但它比常用的 DWT 图像处理算法复杂性要高，且实时性较差。这也是提高图像重构质量带来的必然结果。未来，我们将进一步研究该算法对图像特征采样的稀疏性和实现的有效性。

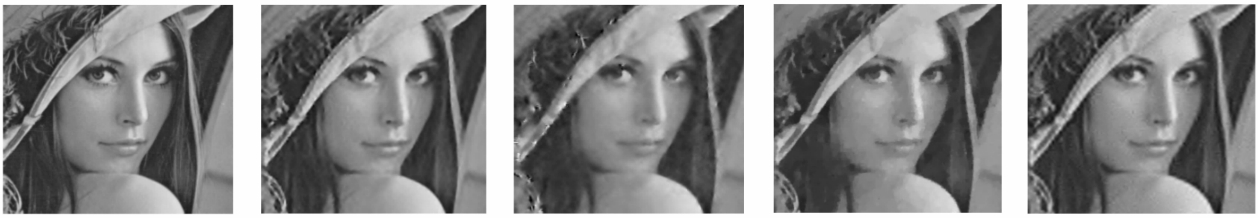
(a)　(b)　(c)　(d)　(e)

图 1　CS 图像重构算法的实现比较（$S=0.1$）

Fig. 1　The performances comparison based CS image reconstruction algorithm

（a）原始图像；（b）本文算法重构的图像（PSNR = 31.6 dB）；（c）BCS-SP 算法重构的图像（PSNR = 28 dB）；（d）TV 算法重构的图像（PSNR = 29.8 dB）；（e）多尺度 GPSR 算法重构的图像（PSNR = 30.2 dB）

表 3　几种算法重构图像的 PSNR（dB）对比结果

Table 3　Comparison Results of PSNR（in dB）for several image reconstruction algorithm

采样子率	Lena				Barbara				Pepper			
	本文算法	BCS-SPL	TV	GPRS	本文算法	BCS-SPL	TV	GPRS	本文算法	BCS-SPL	TV	GPRS
S = 0.1	31.60	28.00	29.80	30.20	23.82	22.40	22.96	24.04	31.06	28.98	30.37	29.30
S = 0.2	34.68	31.54	32.88	33.61	25.08	23.76	24.48	25.28	34.21	32.06	33.12	31.86
S = 0.3	36.67	33.69	35.04	35.21	26.05	25.38	26.26	26.09	35.69	33.84	34.70	33.06
S = 0.4	37.90	35.37	36.80	36.32	27.36	27.01	28.40	27.45	36.76	35.20	35.90	34.22
S = 0.5	39.02	36.86	38.41	37.73	28.85	28.63	30.79	29.61	37.68	36.44	37.01	57.78

参考文献：

[1] CANDES E, ROMBERG J, TERENCE TAO. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information [J]. IEEE Trans On Information Theory,2006,52 (2):489 – 509.

[2] DONLHO D L, TSAIG Y. Extensions of compressed sensing [J]. Signal Processing,2006,86(3) :533 – 548.

[3] CHEN C, TRAMEL E W, FOWLER J E. Compressed-Sensing recovery of images and video using multihypothesis predictions[C] // Proceedings of the 45th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers, Pacific Gro-ve, CA, 2011:1193 – 1198.

[4] 杨海蓉,张成,丁大为,等. 压缩感知理论与重构算法[J]. 电子学报,2011,39(1): 142 – 147.

[5] 练秋生,周婷. 结合字典稀疏表示和非局部相似性的自适应压缩成像算法[J]. 电子学报,2012, 40(7): 1416 – 1422.

[6] KIM Y, NADAR M S, BILGIN A. Compressed sensing using a Gaussian scale mixtures model in wavelet Domain [C]//Proceedings of the International Conference on Image Processing, Hong Kong,2010:3365 – 3368.

[7] 周燕,张德丰,马子龙. 基于压缩传感的图像哈希水印算法[J]. 中山大学学报:自然科学版,2010, 49(6): 58 – 63.

[8] MUN S, FOWLER J E. Block compressed sensing of images using directional transforms[C]//Proceedings of the International Conference on Image Processing, Cairo, Egypt, 2009:3021 – 3024.

[9] SCHNITER P, POTTER L C, ZINIEL J. Fast bayesian matching pursuit: Model uncertainty and parameter estimationfor sparse linear models[J]. IEEE Transactionson Signal Processing, 2009, 57(3):2201 – 2229.

[10] CANDES E, ROMBERG J, TERENCE T. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements [J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2006, 59(8):1207 – 1223.

[11] DO T T, TRAN T D, GAN L. Fast compressive sampling with structurally random matrices[C]// Proceedings of the International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2008:3369 – 3372.

[12] 赵慧民,郭一缜,丁晓艳,等. 用于视频多播传输的压缩传感实现方法研究[J]. 中山大学学报:自然科学版,2012, 51(1): 45 – 49.

[13] GAN L. Block compressed sensing of natural images [C] // Proceedings of the International Conference on Digital Signal Processing, Cardiff, UK, 2007: 403 – 406.